Functional Dimensionについて (対称空間上の不変微分方程式)

竹中, 茂夫

数理解析研究所講究録
249巻 1975年 31-38

functional dimensionについて

名大　理学部　竹中茂夫

無限次元空間として関数の作る位相線型空間をとらえ，その“大きさ”を考えようという試みが S. Banach [1] にみられる．その方法は位相的 imbedding の可否によって二つの空間の大小を相対的に決めようというのであった．これを受けて，A. N. Kolmogorov [5] は，位相線型空間に一般的な“次元”を定義し，この次元が対象を特殊なものに限ると実数を scale とする絶対的なものになり，さらにある場合では空間の元をなす関数の変数の数という具体的なものに結びついていることを示した．この最後の次元の一つの例として，対象を Fréchet 型の nuclear space に限った functional dimension があり，ここではこの functional dimension の一性質と，群の表現論との結びつきを示そう。

§0.　Gを有限群，$\{(T_\lambda, H_\lambda)\}$ をその既約表現の同値類全体とする時，次の定理はよく知られている，

定理 0. $\# G = \sum (\dim H_\lambda)^2$.

この定理の連続群へのversionを考えるために上式を次のように理解しよう,

$$(*) \begin{cases} L^2(G) = \sum \oplus H_\lambda \otimes H_\lambda & (\text{既約分解}). \\ \dim (L^2(G)) = \sum (\dim (H_\lambda \otimes H_\lambda)) = \sum (\dim H_\lambda)^2. \end{cases}$$

これに対応するものとして連続群には, Plancheral formula が存在する,

$$(**)\ L^2(G) = \int_\Lambda H_\lambda \otimes H_\lambda \, dP(\lambda) \quad .$$

これをヒントに定理0の一般化を考えたいのだが, 現在の所次にしめすコンパクト半単純群の場合しか知られていない。

定理 1. Gをコンパクト半単純リー群として, $\mathcal{B}(G)$ を G上の analytic functional の作る空間とした時,

$$\dim G = d_f(\mathcal{B}(G)) \quad .$$

記号の意味及び 定理0と 定理1との関係は以下の節で示す。

§1. I.M. Gelfand の問題.

Gelfand は [2] で $SL(n, \mathbb{C})$ の既約ユニタリー表現に対して, 次の式が成立つことを注意した。

$$(***)\ \dim G = \left(\begin{array}{c}\text{既約ユニタリー表現の}\\\text{パラメーターの個数}\end{array}\right) + 2\left(\begin{array}{c}\text{表現が実現されている}\\\text{関数空間の変数の数}\end{array}\right).$$

これは，定理 0 の連続群への version と云い得る。もちろん上式は，数学的には意味を持たないので，これをどう解釈するかという問題提起なのである。H. Yoshizawa はこの式の少なくとも右辺の第二項は，Kolmogorov-Gelfand の functional dimension の概念で解釈可能だと考え，一般にある構造（例えば，表現を定義するユニタリー作用素が働いているといった）を持った空間の functional dimension を計算せよ，という問題を出した.（[11]） 微分方程式の解の作る空間に対して，Kômura 及び Tanaka が解答を与えている。（[6]，[8]） それらによると，解析関数的性質を持つ関数の作る空間の functional dimension は，まさに変数の数と一致しているのである． そこで，上記 Gelfand-吉澤の問題は次のように言いかえられる：

抽象的ヒルベルト空間及び，その上のユニタリー作用素の作る組で与えられた，リー群のユニタリー表現から，その表現だけを使って定義される（すなわち実際にどんな関数の作る空間であったかとは無関係に）何か解析的な空間を考えその functional dimension を計算せよ。 ということになる．

§2. functional dimension の定義と性質

Hを $\|\cdot\|$ を norm とする Hilbert space とする。
H内で定義された可算ヶの Hilbert norm で 次の性質を持つものを考える。 $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_n \leq \|\cdot\|_{n+1}$.

$E_n := \overline{\{x \in H,\ \|x\|_n < \infty\}}^{\|\cdot\|_n}$ と定義し，E を $\{E_n\}$ より定義される σ-Hilbert space すなわち

$$E := \varprojlim_n E_n, \quad \text{とする.}$$

U_n を E_n の unit ball すなわち

$$U_n := \{x \in E_n ; \|x\|_n \leq 1\} \quad \text{とする.}$$

定義 (ε- entropy)

$$H(U_n, \epsilon U_m) := \log_2 \min(N), \quad n > m.$$

ここで min は次の集合に対して取る,

$$\{N ; x_1, \cdots, x_N \in U_n ; \forall x \in U_n, \exists x_i, \ \text{s.t.}\ x \in x_i + \epsilon U_m\}.$$

定義 (functional dimension)

$$d_f(E) := \sup_n \inf_m \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log_2 H(U_n, \epsilon U_m)}{\log_2 \log_2 \frac{1}{\epsilon}} - 1.$$

注. Eが有限次元なら $d_f(E) = 0$, 又 $d_f(E) < \infty$ ならEは nuclear space であるが逆は成立しない。

定理 2. [9] E及びFを σ-Hilbert space とする時,

1) $d_f(E+F) = \max(d_f(E), d_f(F))$

2) $d_f(E \otimes F) = d_f(E) + d_f(F)$

ここに $\otimes$ は空間のテンソル積とする。

注. (**) 中の積分記号内の $\otimes$ と (***) の右辺第二項の $2\times$ がこの定理によって説明され, さらに(*)の $(\ )^2$ との結びつきが暗示される。

§3. Analytic functionals. $\mathcal{B}(\mathcal{D})$.

$\mathcal{D}=(T_{(g)}, H)$ をリー群 G のユニタリー表現とする.

定義 (E. Nelson [7]) $f \in H$ が analytic vector であるとは, $T_{(g)}f$ が $G \longrightarrow H$ の (Gを変数とする, H-valued function として) analytic function である時をいう。

analytic vector 全体の作る空間を $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ と書く.

この $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ の characterization として次の定理がある。

定理 3. (R. Goodman [4])

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \varinjlim_{t} E_t .$$

ここで, $E_t = \overline{\{f \in H, \|e^{t|\Delta|}f\| < \infty\}}^{\|e^{t|\Delta|}\cdot\|}$,

$\sqrt{\Delta} = (1\Sigma \partial T(X_i)^2 1)^{1/2}$　$\{X_i\}$ は G の Lie algebra の base。

このA(𝒟)は，d_fを測るべき解析性を持つ空間ではあるが，Fréchet 型ではないのと，一方本書の他の論文等からしても，このdual $\mathcal{B}(\mathcal{D}) = (\mathcal{A}(\mathcal{D}))'$ が解析的には，より本質的だと思われるので，functional dimension を $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ について計算する。

定義　$\mathcal{B}(\mathcal{D}) = (\mathcal{A}(\mathcal{D}))'$

一般論より　$\mathcal{B}(\mathcal{D}) = \varinjlim_{t} E_{-t}$　.

注．d_fの定義は，一般のnuclear space に対して拡張でき，またFréchet 型に対しては，次のような計算法が知られているが　そのdual であるD-F型のspace に対しては，近傍系の複雑さゆえにこれに対する計算法が知られていない。

この場合でも $d_f(\mathcal{B}(\mathcal{D}))$ は計算できるが，$d_f(\mathcal{A}(\mathcal{D}))$ はだめなのである。望み得る性質としては，

$d_f(\mathcal{B}(\mathcal{D})) = d_f(\mathcal{A}(\mathcal{D}))$.

さて，G が connected semisimple cpt Lie group で，𝒟 を正則表現とすると（この時，$\mathcal{B}(\mathcal{D})$，$\mathcal{A}(\mathcal{D})$ を特に $\mathcal{B}(G)$，$\mathcal{A}(G)$ と書くことにする。）　Δは，普通の Laplacian に取ることができる。　又 Δ の

spectrumは，完全にしられている。 さてこの$\mathcal{B}(G)$のようにして定義された空間のfunctional dimensionは，種になるoperator Δ の spectrumを知ることによって，簡単に計算できる。（cf. S. Takenaka [9], [10].）

それにより

定理 1. Gを cpt. s.s Lie groupとすると，

$$\dim G = d_f(\mathcal{B}(G)).$$

non-compact な群の場合には，表現の既約成分の一つ一つが無限次元の空間となり，その analytic functionals の functional dimension を考えることができるが（[10]），(＊＊＊)の左辺の意味づけのためには analytic vector 以外の他の概念をプラスする事が必要であると思われる。 なお，§3 に関しては，S. Takenaka [10] でくわしい証明がのべられている。

文　献

[1] S.Banach; Theéorie des Opérations Linéaires, Warszawa 1932

[2] I.M.Gelfand; Some Aspects on Functional Analysis and Algebra, Proc. I.C.M. Amsterdom 1952

[3] 〃 ; Generalized Functions vol.4, Academic Press 1964

[4] R.Goodman; Analytic Domination by Fractional Powers of Positive Operator, J. of Functional Ana. 1969

[5] A.N.Kolmogorov; On Linear Dimensions of Topological Vector Spaces, Doklad. A.N.120 1958 (in Russian)

[6] Y.Kômura; Die Nuklearität der Lösungsräume der Hypoelliptische Gleichungen, Funkcialaj Ekva. 9 1966

[7] E.Nelson; Analytic Vectors, Ann. of Math. 70 1959

[8] S.Tanaka; ε-entropy of Subsets of the Spaces of Solutions of Certain Partial Differential Equation, J.M.Kyoto Univ. 6 1967

[9] S.Takenaka; Functional Dimension of Tensor Product, Proc. Japan Acak. 17 1971

[10] 〃 ; On Functional Dimension of Group Representation II , J.M.Kyoto Univ. 14 1974

[11] H.Yoshizawa; ユニタリ表現概論 ,数学 19 1968